LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« $\mathbf{4^{EME}}$ Technique»

SERIE D'EXERCICES

Intégration-Logarithme népérien-Exponentielle

EXERCICE N1 :

A/Calculer (au moyen d'une primitive) chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x+3e^{2x})dx$; $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$; $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}dx$; $\int_0^1 x^2e^{(x^3+1)}dx$; $\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}dx$

$\int_1^{e-1} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx$; $\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x+e^{-x}}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,(\sin 2x)^4 dx$; $\int_0^1 \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$;

$\int_1^2 \frac{e^{(\frac{1}{x})}}{x^2}dx$; $\int_2^e \frac{1}{x\ln x}dx$; $\int_0^1 \frac{(1+e^{-x})^2}{e^x}dx$; $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

B/ Calculer (au moyen d'intégration par parties) chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (1-x)e^x dx$; $\int_1^2 x(\ln x)^2 dx$; $\int_1^e (\ln x)^2 dx$; $\int_0^1 x^2e^{3x}dx$

C/ 1) Dresser le tableau de signes de l'expression : $f(x) = 2 - e^{1+x}$

2) En déduire la valeur de l'intégrale K= $\int_{-1}^0 |f(x)|dx$ (indication : utiliser la relation de Chasles)

EXERCICE N2 :

1) Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{12x+6}{(x+2)^2}$

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$ pour tout $x \in IR \setminus \{-2\}$

b) Calculer alors $\int_0^1 f(x).dx$

2) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

EXERCICE N3 :

Soit le réel A= $\int_0^1 e^x \sin(\pi x)\,dx$

1) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que : A= $\pi(e+1) - \pi^2 A$

2) En déduire la valeur de A.

EXERCICE N4 :

On considère la fonction f : $x \longmapsto (1-x)^2e^x - 1$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire une interprétation géométrique.

c) Montrer que la droite Δ : y=-1 est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=(x^2-1)\,e^x$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur IR.

3) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans IR exactement trois solutions, dont l'une est nulle.

(On note α et β les deux autres solutions tels que $\alpha < \beta$)

b) Vérifier que -2,6< α <-2,5 et que 1,4< β <1,5

4) Tracer la courbe (C).

5) Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, que : $\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx = 2e - 5$

6)a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D : y=x et les droites d'équations : x=−1 et x=1

EXERCICE N5 : (BAC SC. EXP. 2010)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f '.

1) Reconnaitre la courbe représentative de f et celle de f '.
2) Déterminer f(0) , f '(0) , f(-1) , f '(-1).
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f ' , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 0.

II) La fonction f est définie sur IR par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e - 5$.

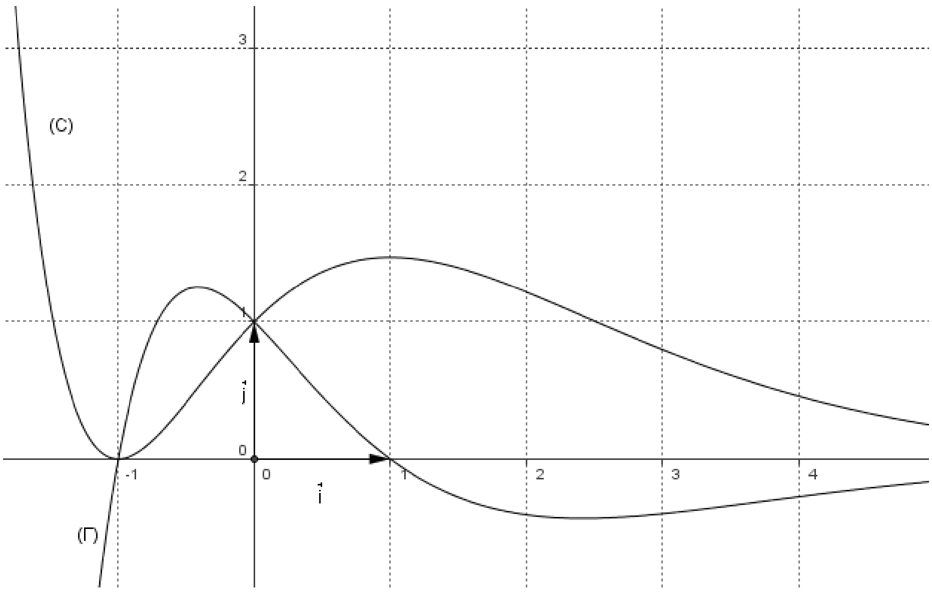
b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations x = -1 et x = 0.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [1 , +∞[.

a) Montrer que g réalise une bijection de [1 , +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans [1 , +∞[une solution unique α et que $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$.

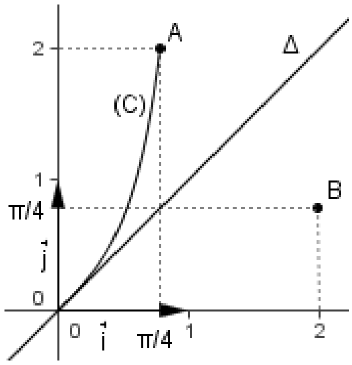
c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g) .



EXERCICE N6 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=(\tan x)^3+\tan x$.

La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y=x$.



1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

3) Calculer (en unité d'aire : u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE N7 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x.\ln x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et (C) sa courbe selon un RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f, puis tracer la courbe (C). (l'unité : 2cm)

3) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^e x^2\ln x\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$

b) Calculer le volume V (en unité de volume) du solide engendré par la rotation autour de $(O,\vec{\imath})$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations x=1 et x=e

EXERCICE N8 :

On pose $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR.

c) Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto F(x)+F(-x)$ est constante sur IR. En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x)= F(\tan x)$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

b) Calculer g(0). En déduire que g(x)=x

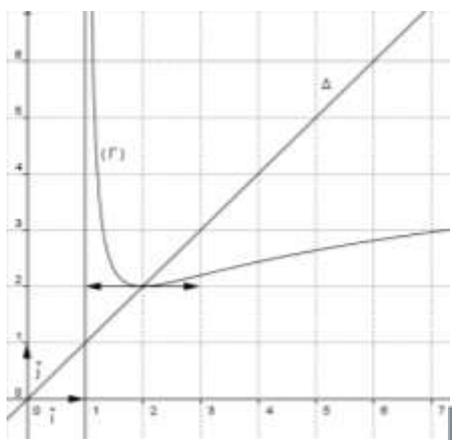
c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

3) a) Vérifier que F est la fonction réciproque de $f : x \longmapsto \tan x$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

EXERCICE 9 :

A/ Dans le graphique ci-contre, la courbe (Γ) est celle de la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{ax}{x-1}+b.\ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation y=x. L'unique tangente horizontale à la courbe (Γ) est au point A(2,2)



1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En se servant des valeurs de g(2) et g'(2), montrer que a=b=1

3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$

b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ), Δ et les droites d'équation x=2 et x=e+1

B/ Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$ on a : $f'(x)=g(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que le point I(2,0) est un point d'inflexion de (C).

5) Tracer la courbe (C).

C/ Soit la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1)\, dx$

1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1.

b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$

c) Calculer le terme I_1.

2) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_2^e \left(\frac{x}{e}\right)^n \ln(x-1)\, dx\right)$

EXERCICE 9 :

Soit $g(x)=x+\ln(e^{-2x}+1)$; $x \in [0,+\infty[$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Etablir le tableau de variation de g.

2) Montrer que la droite D : y=x est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Etudier la position de (C) par rapport à D.

4) Tracer (C) et D.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

6) a) Montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$ on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a : $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

c) En déduire un encadrement de $\ln(1+e^{-2t})$ pour tout t de $[0,+\infty[$.

7) Soit $\mathcal{A}_n$ la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations x=0 et x=n.

a) Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq \mathcal{A}_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$

EXERCICE 10 :

On donne le tableau de variation de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x+3)$.

x	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

1) Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans]1,2[.

2) Soit la suite réelle $(\mathbf{u_n})$ définie sur IN par :

$\mathbf{u_0}=1$ et $\mathbf{u_{n+1}}=f(\mathbf{u_n})$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{1} \leq \mathbf{u_n} \leq \mathbf{2}$. (On prend ln4≃1,4 et ln5≃1,6)

b) Montrer que la suite $(\mathbf{u_n})$ est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence)

c) En déduire que la suite $(\mathbf{u_n})$ est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout x ∈ [1,2], on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout n ∈ IN on a :

$|\mathbf{u_{n+1}} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|\mathbf{u_n} - \alpha|$

c) En déduire que pour tout n ∈ IN on a : $|\mathbf{u_n} - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$

d) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{u_n}$

EXERCICE 11:

I/ Cocher la réponse exacte :

La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, e^x dx$ est une suite :

a/ croissante b/ décroissante c/ stationnaire

II/ On pose $u_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}dx$ pour tout $n \in IN^*$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que :

$2u_{n+1} = (n+1)u_n - e^{-2}$ pour tout $n \in IN^*$.

b) En déduire que $u_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$.

3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0\ \forall\ n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $\in IN^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N12 : (BAC 2004)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈IN on a : $1 < u_n < 2$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

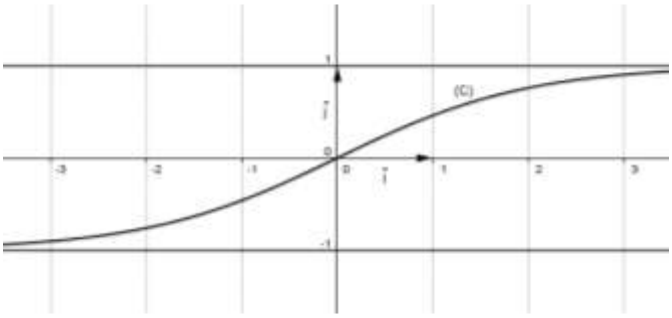
2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln(u_n - 1)$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ .Préciser son premier terme.

b) Exprimer u_n à l'aide de n. Puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 13 :

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{ae^x+b}{e^x+1}$ où a et b sont deux réels.



Les droites d'équations : $y=1$ et $y=-1$ sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

(L'unité graphique : 2cm)

1) a) A l'aide d'une lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) En déduire que : $a=1$ et $b=-1$.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x+1}$

b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

c) En déduire, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

EXERCICE 14 :

I/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2) En déduire que $g(x)>0$ pour tout réel x.

II/ Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=xe^{-x}+x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=g(x)$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Montrer que la droite D : $y=x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à D.

3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche infinie parabolique dont on précisera la direction.

4) Tracer D et (C).

5) Soit $\in IR_+^*$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\alpha$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b) En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

EXERCICE 15 :

Soit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x}{x-1}+\ln(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=3$ admet exactement deux solutions α et β dans $]1,+\infty[$.

b) On suppose que $\alpha < \beta$. Vérifier que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

2) Etudier les branches infinies de (Γ).

3) Montrer que la courbe (Γ) admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

4) Tracer la courbe (Γ).

5) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx = e$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Γ), Δ : y=x et les droites d'équation x=2 et x=e+1

EXERCICE 16 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x+1-e^{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etablir le tableau de variation de f

2) a) Montrer que la droite D : y=x+1 est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

b) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $(+\infty)$.

3) Tracer la courbe (C) et la droite D.

4) On désigne par P la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations x=0 et x=2.

a)En utilisant une intégration par partie, montrer que $\int_0^2 (x+1)\, e^{x-1}dx=2e$

b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de P autour de l'axe des abscisses.

EXERCICE 17 :

A/Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Résoudre dans IR, l'équation $1 - 2e^{2x-2} \geq 0$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solution α et 1.

Vérifier que $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^{2x-2}$ et la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4) a) Montrer que pour tout $\in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout entier naturel on a : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 18 :

Soit la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1)\, dx$

1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1.

b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$

c) Calculer le terme I_1.

2) a) Montrer que la suite (I_n) est croissante et à termes positifs.

b) En déduire que (I_n) est convergente.

3) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout n∈ IN* on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$

b) En déduire que pour tout n∈ IN* on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n}{e^n}$

EXERCICE N19 :

A/ On considère la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = 1 + x\ln(1+x) \text{ si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable en 0 et f'(0)=0.

b) Calculer f'(x) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier les branches infinies de (C).

2) Montrer que la partie de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

3) a) Montrer que l'équation f(x)=2 admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$

b) Tracer la droite D : y=2 et la courbe (C).

4) Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites d'équations x= λ et x=0.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

B/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera.

2) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?

4) Montrer que pour tout x∈ [1,2[on a : $g^{-1}(x)=\ln(1-\sqrt{x-1})$.

5) Montrer que $\int_1^{\frac{5}{4}} g^{-1}(x)dx = \frac{5ln2}{4} - A(-ln2)$

C/ Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx$; n∈ IN^*

1) a) Vérifier que pour tout x∈ [0,1] on a : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ puis calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{4}$

2) Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équation x=0 , x=1 et y=0.

3) a) Montrer que pour tout n∈ IN^* on a : $0 \leq I_n \leq \frac{ln2}{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{I_n}$

EXERCICE N20 :

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout n∈ IN* $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Etablir pour tout n∈ IN* la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En remarquant que $x.(\ln x)^n = x^2\,\frac{(\ln x)^n}{x}$ montrer que

$\frac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2\,\frac{(\ln x)^n}{x}$ pour tout $x \in [1, e]$.

b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE N21 :

1) Vérifier que pour tout réel non nul x, on a : $\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$

2) a) Calculer l'intégrale $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t-1}\,dt$

b) Calculer alors, l'intégrale

$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t-1}\,dt$

3) Soit l'intégrale $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t-1}\,dt$

Calculer l'intégrale $K-I$. En déduire la valeur de K.

EXERCICE N22 :

On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x)^2 e^x - 1$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (L'unité graphique : 1cm)

1) a) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire une interprétation géométrique.

c) Montrer que la droite $\Delta : y=-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=(x^2-1)\,e^x$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur IR.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans IR exactement trois solutions, dont l'une est nulle. (On note α et β les deux autres solutions tels que $\alpha < \beta$)

b) Vérifier que $-2{,}6 < \alpha < -2{,}5$ et que $1{,}4 < \beta < 1{,}5$

4) Tracer la courbe (C).

5) Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, que : $\int_0^1 (1-x)^2 e^x\,dx = 2e-5$

6) a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D : $y=x$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1$